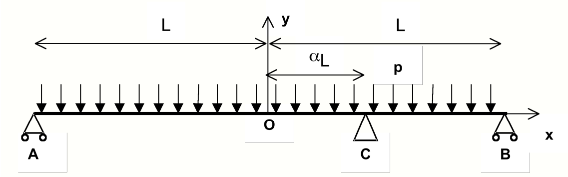
1.TD1 :POUTRES A APPUIS MULTIPLES ET SYSTEMES HYPERSTATIQUES :EFFICACITE DES METHODES ENERGETIQUES

Exercice A :MODELE DE P0NT :

Incidence d'une dénivellation d'appui accidentelle (Poutre continue élastique sous 3 appuis)



Pont de l'Ile de Ré - (1987 - 1988)
France
© Bouygues Construction

On se propose d'étudier l'incidence d'une dénivellation d'appui accidentelle sur un pont. La structure est modélisée par la poutre droite de la figure ci-dessus.

Partie 1

La poutre droite AB étudiée a pour longueur 2L. Elle est placée selon l'axe Ox d'un repère cartésien orthonormé : les abscisses A et B ont respectivement pour abscisse : $x_A = -L, x_B = L$. L'appui intermédiaire C a pour abscisse $x_C = \alpha L$ avec $0 \le \alpha \le 1$. La section de cette poutre est constante et admet le plan Oxy comme plan de symétrie. Le chargement actif est représenté par une densité linéique de force $f(x) = -p\mathbf{e_y},\ p > 0$. Les appuis A, B et C sont simples, unilatéraux, n'exerçant donc en ces points que des réactions que l'on notera $\mathbf{R_A} = R_A\mathbf{e_y}$, $\mathbf{R_B} = R_B\mathbf{e_y}$, $\mathbf{R_C} = Y\mathbf{e_y}$ avec $R_A \ge 0,\ R_B \ge 0, Y \ge 0$.

1.1. Déterminer les valeurs des réactions d'appui en fonction de p et de la réaction Y d'appui en C. Préciser le domaine de variation de l'inconnue hyperstatique Y par les conditions de liaison du problème.
1.2. Donner en fonction de p et Y l'expression de toutes les distributions de torseurs d'efforts intérieurs.

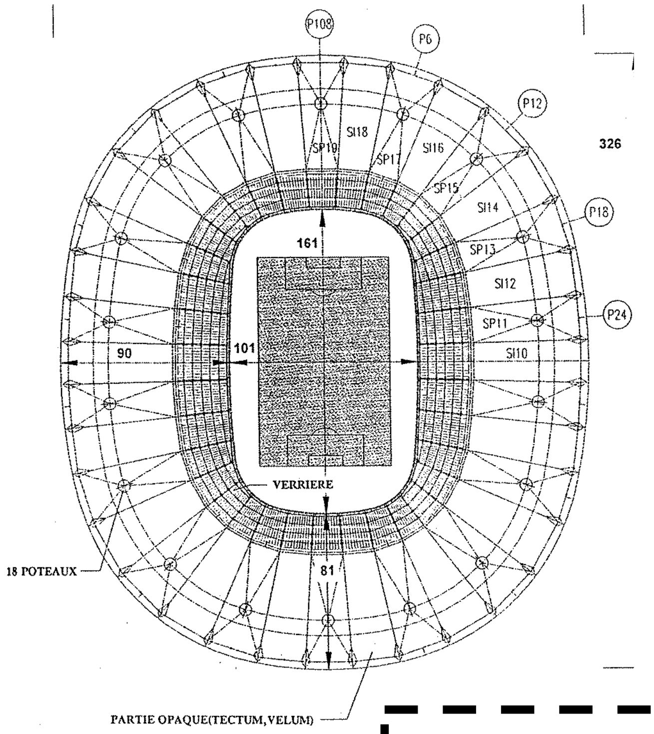
Partie 2

On suppose l'appui intermédiaire C situé en O (α=0). On désigne par I le moment d'inertie de la section constante de cette poutre par rapport à son axe principal d'inertie $\mathbf{e_z}$. Le matériau constitutif est homogène, isotrope, linéairement élastique, de module d'Young E.
2.1. On suppose les 3 appuis situés au même niveau à la cote y=0. Déterminer la valeur de réactions d'appuis et la distribution de torseurs d'efforts intérieurs par la méthode de Castigliano.
2.2. On suppose l'appui en C légèrement dénivelé vers le bas : sa cote est v<0 ($|v| << L$). Cet appui n'est donc pas au contact de la poutre dans son état initial non chargé. Déterminer, en fonction de v, la valeur de réactions d'appuis et la distribution de torseurs d'efforts intérieurs.
2.3. Avec des valeurs significatives pour un tablier de pont : $E=4.10^4$ MPa, $I=6\ m^4$, L=30 m, $p=2.10^5$ N/m, déterminer la valeur du tassement v tel que l'appui C ne soit plus au contact de la poutre dans son état chargé.

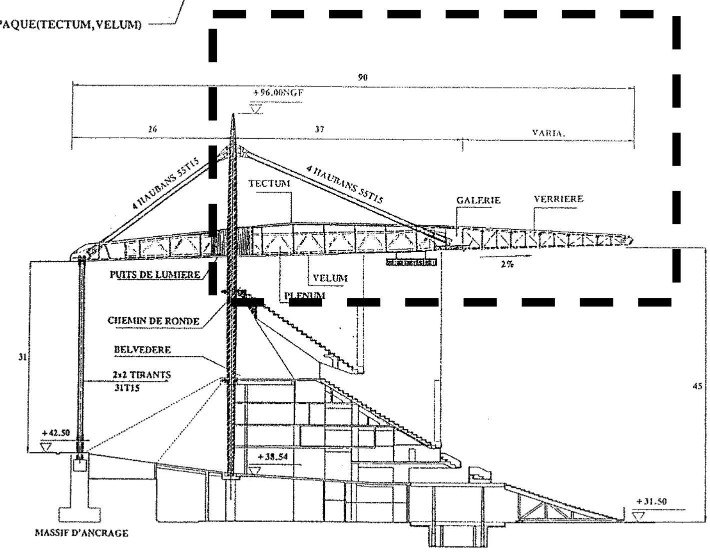
Exercice B : TOITURE DU STADE DE FRANCE

Etude simplifiée de l'action des haubans

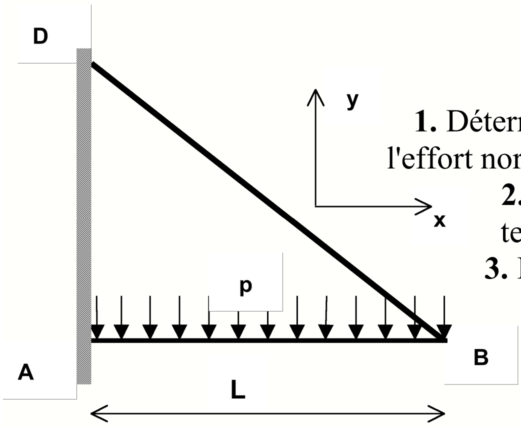
La toiture du stade de France est un élément architectural majeur de l'ouvrage.
Dans l'esprit des architectes concepteurs, il s'agissait d'un disque plat, transpercé de fins javelots ou aiguilles.



Cette toiture est en fait une structure métallique ovale portée par dix huit poteaux verticaux, répartis assez régulièrement sur l'extérieur de l'arène au moyen de 4 nappes de haubans en étoile et contrebalancée par des tirants verticaux sur sa périphérie extérieur.



Nous allons étudier une modélisation simplifiée du toit, assimilé à une poutre, et du hauban . La poutre AB est de section constante (moment d'inertie I). Le module d'Young est constant égal à E. L'appui A est fixe avec encastrement, l'extrémité B est reliée à un câble (de module d'Young E) attaché à son autre extrémité en D. Le chargement actif est constitué de la charge verticale descendante de densité linéique p. Soit S la section de la poutre et s la section du câble, l'angle entre la poutre et le câble est de 30 degrés.



1. Déterminer les variations du moment de flexion M, de l'effort normal N et de l'effort tranchant T le long de la poutre.

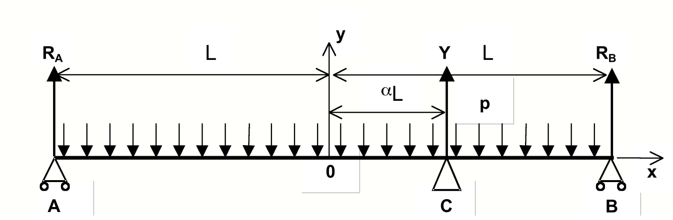
2. En utilisant le théorème de Castigliano, déterminer la tension du câble.

3. Donner la flèche au point B.

CORRIGES

1.TD1 :POUTRES A APPUIS MULTIPLES ET SYSTEMES HYPERSTATIQUES :EFFICACITE DES METHODES ENERGETIQUES

EXERCICE A



1.1. Equilibre : $\begin{cases} R_A + R_B + Y - 2Lp = 0 \\ 2LR_B + (1+\alpha)LY - 2L^2 p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_A = pL - Y(1-\alpha)/2 \\ R_B = pL - Y(1+\alpha)/2 \end{cases}$

Domaine de variation de Y : avec $R_A \geq 0$, $R_B \geq 0$ et $Y \geq 0$ on obtient $0 \leq Y \leq 2pL/(1+\alpha)$ (la valeur $2pL/(1+\alpha)$ correspond au cas isostatique avec liaison en B rompue).

1.2. Equations de la statique : $\begin{cases} \dfrac{dN}{dx} = 0 \\ \dfrac{dV}{dx} - p = 0 \\ \dfrac{dM}{dx} + V = 0 \end{cases}$ avec $\begin{cases} N(-L) = 0 \\ V(-L) = -R_A \\ M(-L) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} N(L) = 0 \\ V(L) = R_B \\ M(L) = 0 \end{cases}$

$-L \leq x \leq \alpha L \quad \begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = px + Y(1-\alpha)/2 \quad (x \neq \alpha L) \\ M(x) = \dfrac{p(L^2 - x^2)}{2} - Y(L+x)\dfrac{1-\alpha}{2} \end{cases} \qquad \alpha L \leq x \leq L \quad \begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = px - Y(1+\alpha)/2 \quad (x \neq \alpha L) \\ M(x) = \dfrac{p(L^2 - x^2)}{2} - Y(L-x)\dfrac{1+\alpha}{2} \end{cases}$

On vérifie que l'on a bien $\begin{cases} V((\alpha L)^+) - V((\alpha L)^-) + Y = 0 \\ M((\alpha L)^+) = M((\alpha L)^-) \end{cases}$

2.1. On a maintenant : $R_A = R_B = pL - Y/2$

$$-L \le x \le 0 \quad \begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = px + Y/2 \\ M(x) = p\dfrac{(L^2 - x^2)}{2} - Y\dfrac{L+x}{2} \end{cases} \qquad 0 \le x \le L \quad \begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = px - Y/2 \\ M(x) = p\dfrac{(L^2 - x^2)}{2} - Y\dfrac{(L-x)}{2} \end{cases}$$

Résolution par Castigliano

$$W = \int_{-L}^{L} \frac{M^2}{2EI} = \frac{1}{2EI}\int_{-L}^{0}\left(-\frac{p}{2}(L^2 - x^2) - \frac{Y}{2}(L+x)\right)^2 dx + \frac{1}{2EI}\int_{0}^{L}\left(\frac{p}{2}(L^2 - x^2) - \frac{Y}{2}(L-x)\right)^2 dx$$

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = 0 \Rightarrow -\frac{5pL^4}{24EI} + \frac{YL^3}{6EI} = 0$$

D'où $Y = 5pL/4$ et $R_A = R_B = 3pL/8$ et le torseur des efforts intérieurs d'après les expressions ci-dessus.

2.2. Si la liaison est établie en C entre la poutre et l'appui intermédiaire dénivelé, la valeur Y de la réaction d'appui est telle que, en considérant la poutre AB appuyée en A et B seulement soumise au chargement constitué de la densité linéique uniforme $-p\mathbf{e}_y$ et d'une force $Y\mathbf{e}_y$ appliquée en O, le déplacement $\xi_y(0)$ du point O est égal à la cote v de l'appui ; $\xi_y(0) = v$.

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = \xi_y(0) = v \Rightarrow Y = 5pL/4 + 6EIv/L^3$$

Le résultat n'est valable que si le contact est effectivement établi en C : $0 \le Y \le 2pL$ d'où la condition : $v \ge -5pL^4/24EI$.

On obtient les réactions d'appui et le torseur des efforts intérieurs d'après les expressions ci-dessus.

Pour $v < -5pL^4/24EI$, la liaison ne s'établit pas et les réactions d'appui et le torseur des efforts intérieurs sont déterminés dans la poutre isostatique AB (même expressions avec Y=0) :

$$R_A = R_B = pl \text{ et } N(x) = 0,\ V(x) = px,\ M(x) = p\frac{(L^2 - x^2)}{2} \qquad (-L \le x \le L)$$

2.3. On trouve qu'il suffit d'un tassement de 14 cm pour annuler la réaction au droit de l'appui C.

EXERCICE B

Dans tout l'exercice on considère le système {poutre + cable}

1. On a 3 équations d'équilibre et 4 inconnues de liaisons. Le système est donc hyperstatique de degré 1.

Cable :

On note R la tension du cable et on choisit de prendre R comme inconnue hyperstatique.

Equations de la statique

$\frac{dN}{ds} = 0$ => R = constante

Eléments de réductions du cable

N=R

M=0

T=0

Poutre :

$$\frac{dN}{dx} = 0$$

$$\frac{dT}{dx} - p = 0$$

$$\frac{dM}{dx} + T = 0$$

avec comme conditions aux limites au point B :

$$N(L) = -R\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$T(L) = \frac{R}{2}$$

$$M(L) = 0$$

On obtient comme éléments de réductionde la poutre :

$$N(x) = -R\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$T(x) = p(x-L) + \frac{R}{2}$$

$$M(x) = -\frac{p}{2}(x-L)^2 - \frac{R}{2}(x-L)$$

2. Détermination de l'inconnue hyperstatique R par le théorème de Castigliano

$$\frac{\partial W_{total}}{\partial R} = \frac{\partial W_{cable}}{\partial R} + \frac{\partial W_{poutre}}{\partial R} = 0$$

$$\frac{\partial W_{cable}}{\partial R} = \int_0^{\frac{2L}{\sqrt{3}}} \frac{R}{Es}dx = \frac{2RL}{\sqrt{3}Es} \qquad l_{cable} = \frac{2L}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\partial W_{poutre}}{\partial R} = \frac{1}{ES}\int_0^L N\frac{\partial N}{\partial R}dx + \frac{1}{EI}\int_0^L M\frac{\partial M}{\partial R}dx$$

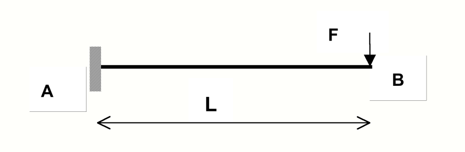
$$\frac{\partial W}{\partial R} = \frac{1}{ES}\int_0^L \frac{3}{4}Rdx + \frac{1}{EI}\int_0^L \left\{\frac{p}{4}(x-L)^3 + \frac{R}{4}(x-L)^2\right\}dx = \frac{3RL}{4ES} - \frac{pL^4}{16EI} + \frac{RL^3}{12EI}$$

$$\frac{\partial W}{\partial R} = 0$$

$$\Rightarrow R = \frac{\frac{pL^3}{16I}}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}s} + \frac{3}{4S} + \frac{L^2}{12I}\right]}$$

3. Détermination de la flèche au point B en utilisant le théorème de Bertrand de Fontviolant.

On considère comme système auxiliaire le système isostatique suivant



Soit N', T', M' les éléments de réduction de la poutre auxiliaire
N' = 0
T' = F
M' = F(L-x)

Théorème de BdF

$$F\vec{y}.u_B\vec{y} = \int_0^L \frac{N}{ES}N'\,dx + \int_0^L \frac{M}{EI}M'\,dx$$

$$Fu_B = \frac{1}{EI}\int_0^L \left\{-\frac{p}{2}(x-L)^2 - \frac{R}{2}(x-L)\right\}F(L-x)dx$$

$$u = -\frac{pL^4}{8EI} + \frac{RL^3}{6EI}$$